Techniques d'Egalisation avancées

4 novembre 2011

Plan

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Signal émis en bande de base

On considère une modulation de type QAM d'ordre M.

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_e(t - kT), \; s_k \in \mathbb{C}$$

- $s_k = I_k + jQ_k$: séquence de symboles émis appartenant à une constellation M-QAM $\mathcal{S}$ ($|\mathcal{S}| = M = 2^m$),
- T : période symbole,
- $h_e(t)$: filtre de mise en forme à l'émission.

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Signal émis en bande transposée (signal modulé)

$$\begin{aligned}
\tilde{s}(t) &= Re[s(t)e^{i2\pi f_0 t}] \\
&= Re[s(t)]cos(2\pi f_0 t) - Im[s(t)]sin(2\pi f_0 t) \\
&= I(t)cos(2\pi f_0 t) - Q(t)sin(2\pi f_0 t) \qquad (1)
\end{aligned}$$

avec

- $I(t) = \sum_k i_k h_e(t - kT)$: signal en phase (PAM voie I),
- $Q(t) = \sum_k q_k h_e(t - kT)$: signal en quadrature (PAM voie Q),

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Signal reçu en bande transposée (signal modulé)

$$\begin{aligned} \tilde{r}(t) &= \alpha_0 \tilde{s}(t) + \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \tilde{s}(t-\tau_l) + \tilde{b}(t) \\ &= Re[r(t)e^{i2\pi f_0 t}] \end{aligned} \tag{2}$$

avec $b(t)$: bruit blanc thermique Gaussien

$$\begin{aligned} \tilde{b}(t) &= Re[b(t)e^{i2\pi f_0 t}] \\ &= Re[b(t)]cos(2\pi f_0 t) - Im[b(t)]sin(2\pi f_0 t) \\ &= b_i(t)cos(2\pi f_0 t) - b_q(t)sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Signal reçu équivalent en bande de base après Démodulation I/Q

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k \left[\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l \exp\left(-j2\pi f_0 \tau_l\right) h_e(t-kT-\tau_l)\right] + b(t) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h_c * h_e(t-kT) + b(t) \\
&= h_c * s(t) + b(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

avec $h_c(t)$: canal de propagation *équivalent* en bande de base

$$
\begin{aligned}
h_c(t) &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} \delta(t-\tau_l) \\
H_c(f) &= \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} e^{-j2\pi \tau_l f}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Filtrage adapté et modèle équivalent bande de base

$$\begin{aligned} y(t) &= h_r * r(t) + h_r * b(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h_r * h_c * h_e(t-kT) + h_r * b(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h(t-kT) + b_r(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

avec $h(t) = h_r * h_c * h_e(t)$: enveloppe complexe du canal global *équivalent* en bande de base

- Pas d'IES si $h_r(t)$ est adapté à $g(t) = h_c * h_e(t)$, $h_r(t) = h_c * h_e(-t)^*$, mais pas très réaliste dans un contexte canal $h_c(t)$ variable en temps.
- En pratique, $h_r(t)$ est adapté à $h_e(t)$, donc $h_r(t) = h_e(-t)$.

Canal à interférences entre symboles
Modélisation

Modèle discret équivalent bande de base (Temps symbole)

$$
\begin{aligned}
y[n] &\triangleq y(nT) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h((n-k)T) + b_r(nT) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

avec $h[n] = h_r * h_c * h_e(nT)$: réponse inmpulsionnelle discrète du canal équivalent en bande de base.

Canal à interférences entre symboles

Modélisation

Bruit échantilonné

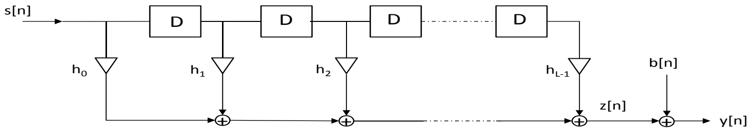
$b_r(t)$ est Gaussien car filtré de b(t), $b[n]$ non corrélés et Gaussiens donc indépendants

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Gamma}_b(f) &= N_0 \\
\overset{\circ}{\Gamma}_{b_r}(f) &= N_0 |H_e(f)|^2 \\
\gamma_b(p) &= N_0 \delta(p)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Modèle discret équivalent bande de base

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n] \\
&= \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k]s[n-k] + b[n] \qquad (8)\\
&= h_0 s[n] + \underbrace{\sum_{k=1}^{L_h-1} h[k]s[n-k]}_{IES} + b[n] \qquad (9)
\end{aligned}
$$



Décodage par Maximum de Vraisemblance

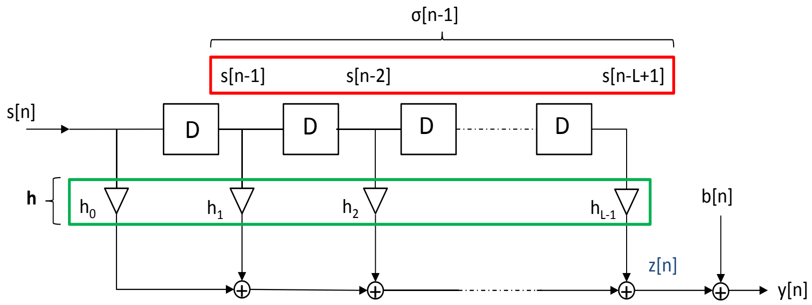
Critère de décodage MLSE

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}} &= \arg\max_{\mathbf{s}'} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}') \\ &= \arg\max_{\mathbf{s}'} \prod_n p(y_n|\mathbf{s}') \\ &= \arg\min_{\{s_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}|^2\end{aligned}$$

- $\mathbf{s} = [s_1 s_2 \dots s_N]$, $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_N]$, $y[n] \sim \mathcal{N}(\sum_k h_k s_{n-k}, N_0)$,
- la séquence optimale est celle qui minimise la distance euclidienne la plus faible.
- utilisation de la structure markovienne du canal pour réaliser un décodage MLSE avec complexité raisonable.

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Modèle convolutif et Représentation d'état



$$
\begin{aligned}
y[n] &= \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} s_n \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} + b[n] \\
&= z[n] + b[n]
\end{aligned}
$$

Décodage par Maximum de Vraisemblance

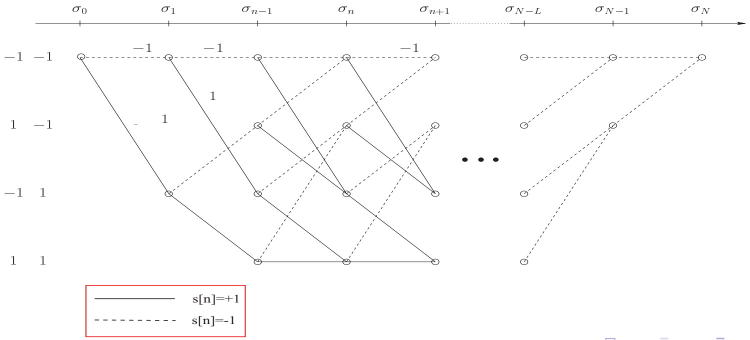
Représentation en treillis

- Représentation fonctionnelle associée :
  - Equation d'évolution : passage d'un état à σ_{n-1} à σ_n.

$$\sigma_n = F_1(\sigma_{n-1}, s_n)$$

  - Equation d'observation : génération des sorties observables $z_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}$.

$$z_n = F_2(\sigma_{n-1}, s_n) = F_3(\sigma_{n-1}, \sigma_n)$$



Décodage par Maximum de Vraisemblance

Représentation en treillis

propriétés

- Chaque chemin sur le treillis représente une séquence de symboles émis possibles :

séquence MLSE	$\Leftrightarrow$	chemin le plus probable, ie de plus petite distance euclidienne cumulée sur le treillis

- Idée de Viterbi : utiliser la structure du treillis pour énumérer et sélectionner “intelligemment” les candidats.
- Ceci est possible en remarquant que

$\{s[n] \mid n = 1 \cdots N\}$	$\Longleftrightarrow$	$\{\sigma[n] \mid n = 0 \cdots N\}$
Espace des séquences		Espaces des Etats

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi

MLSE revisité

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\min_{\{s_n\}} \sum_n |y_n - \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\min_{\{\sigma_n\}} \sum_n |y_n - z_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)|^2$$

Pour la section de treillis n, à l'état $\sigma_n(s)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(\sigma_n) &= \underset{\{\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},\sigma_n\}}{\text{argmin}} \sum_{k=0}^{n} |y_k - z_k(\sigma_{k-1}, \sigma_k)|^2 \\
&= \underset{\{\sigma_{n-1}\to\sigma_n\}}{\text{argmin}} \left\{ \underset{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{n-1}\}}{\text{argmin}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |y_k - z_k|^2 \right\} + |y_n - z_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)|^2 \right\} \\
&= \underset{\underbrace{\{\sigma_{n-1} \to \sigma_n\}}_{\text{transitions possibles}}}{\text{argmin}} \{\Lambda_{n-1}(\sigma_{n-1}) + \lambda_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)\}
\end{aligned}$$

Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi

Algorithme de Viterbi

- Pour chaque section n ($n = 1 \cdots N$), pour chaque état $\sigma_n = s$ ($s = 0 \cdots |\mathcal{S}|$) :
  1. calculer Λ_n tel que

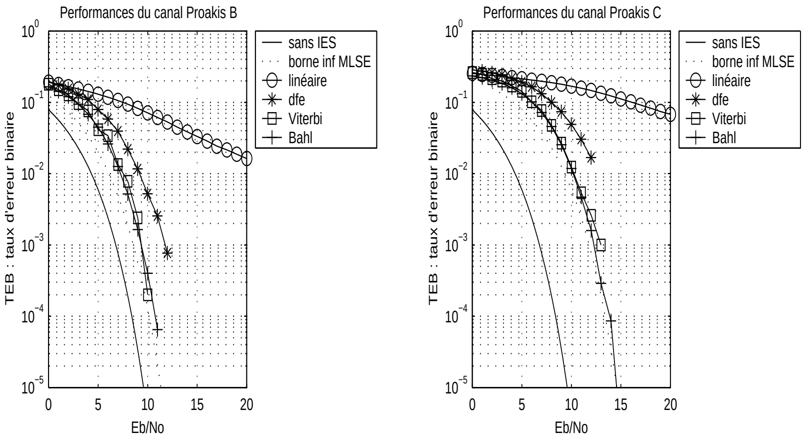
  $$\Lambda_n(\sigma_n) = \underset{\{\sigma_{n-1} \to \sigma_n\}}{\text{argmin}} \left\{\Lambda_{n-1}(\sigma_{n-1}) + \lambda_n(\sigma_{n-1}, \sigma_n)\right\}$$

  2. stocker l'état précédent σ_{n-1} (pour chaque état σ_n, on peut donc associer une séquence $\{\sigma_0, \cdots, \sigma_n\}$ de distance euclidienne $\Lambda_n(\sigma_n)$)
- A la fin du treillis, il ne reste plus que $|\mathcal{S}|$ chemins possibles, alors par parcours arrière des états du treillis

$$\hat{\mathbf{s}} = \left\{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}, \sigma_N \middle| \underset{\sigma_N}{\text{argmin}} \left\{\Lambda_N(\sigma_N)\right\}\right\}$$

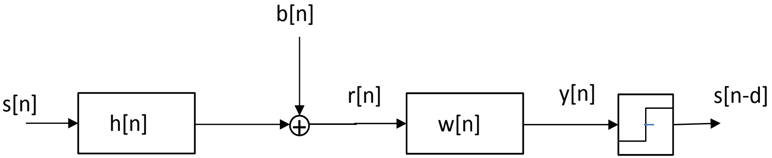
Décodage par Maximum de Vraisemblance

Algorithme de Viterbi : performance



Egalisation linéaire : rappels

Rappels d'égalisation linéaire

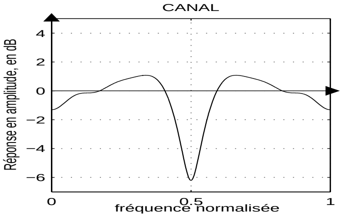


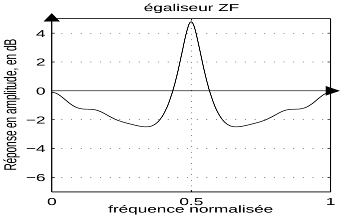
- $w[n]$ est une filtre égaliseur,
- complexité linéaire,.
- différents critères d'optimisation

- Critère zéro-forcing : IES nulle

$$w_{zf}(z) = \frac{z_n^{-d}}{h(z)}$$

- faible compléxité mais forte amplification du bruit begincenter





Egalisation linéaire

Critère EQMM

- Critère EQMM sans contraintes : minimisation de l'erreur quadratique moyenne

$$w_\infty(z) = \sigma_s^2 z^{-d} \frac{h^*(z^{-1})}{\sigma_s^2 h(z) h^*(z^{-1}) + \sigma_b^2}$$

  avec $h^*(z) = \sum_n h^*(n) z^{-n}$

- mitige l'amplification du bruit, mais faible performances pour canaux sévères

Egalisation non linéaire

Decision feedback Equalization(DFE) : principe